Задание № 13 Прямая на плоскости

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Теорема (об общем уравнении прямой на плоскости)**

1. В прямоугольной системе координат любая прямая может быть задана уравнением , где - некоторые действительные числа
2. Любое уравнение вида , где - действительные числа, удовлетворяющие условию , задает на плоскости некоторую прямую.

**Определение:** вектор  называется *нормальным вектором* прямой 

**Теорема (о совпадении прямых)**

1. Разные прямые на плоскости задаются разными уравнениями
2. Два уравнения  и  задают на плоскости одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда .

*Следствие:* Два уравнения  и  задают на плоскости параллельные прямые тогда и только тогда, когда .

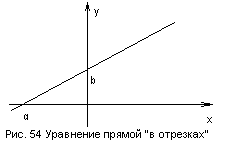
**Теорема (частные случаи общего уравнения)**

Пусть прямая задана уравнением , тогда:

1. Если , то прямая параллельна оси ОХ
2. Если , то прямая параллельна оси ОУ
3. Если , то прямая проходит через начало координат

***Уравнение прямой, проходящей через две данные точки:***

Даны точки  и , требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

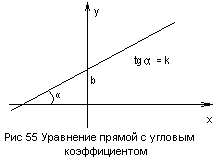
является уравнением прямой, проходящей через две данные точки.

***Уравнение прямой «в отрезках»:***

Рассмотрим общее уравнение прямой:  при условиях  и преобразуем его: , . Обозначив , получим уравнение прямой «в отрезках»:

.

Поскольку при  из уравнения получаем , а при  получим , то числа являются длинами отрезков, отсекаемыми прямой на осях координат, взятыми с соответствующим знаком (рис.54)



***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***

Пусть прямая задана уравнением  и , тогда . Обозначим , :

.

Число  называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси ОХ (рис.55)

Угол отсчитывается против часовой стрелки.

Пусть , тогда:

- если , то ;

- если , то ;

- если , то  и уравнение с угловым коэффициентом использовать нельзя.

Модуль параметра  прямой равен длине отрезка, отсекаемого прямой на оси . При  получим  - уравнение прямой, параллельной оси .

*Уравнение прямой, проходящей через данную точку*



где  - данная точка,  - произвольный параметр.

***Каноническое уравнение прямой***

,

где  - координаты некоторой точки, лежащей на прямой,  - *направляющий вектор* прямой, т.е. ,любой вектор, линия действия которого параллельна прямой.

***Параметрические уравнения прямой***

;

где  - координаты некоторой точки, лежащей на прямой,  - направляющий вектор прямой,  - переменный параметр .

**Основные задачи для прямых на плоскости**

***1. Угол между прямыми***

Угол  между прямыми  и  равен углу между их нормальными векторами, поэтому .

, где  - угловые коэффициенты рассматриваемых прямых.

*Следствие:* 1) прямые  и  перпендикулярны тогда и только тогда, когда .

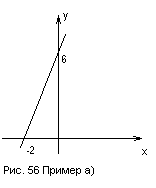
2) прямые  и  прямые  и  параллельны тогда и только тогда, когда .

**2. Определение расстояния от фиксированной точки до прямой**

Пусть дана прямая  и точка , тогда искомое расстояние можно вычислить по формуле

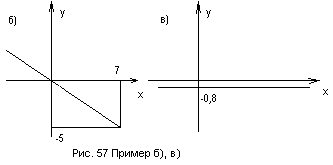
;

**3. Пересечение двух прямых**

Линейное уравнение с двумя неизвестными можно рассматривать как уравнение прямой на плоскости, значит, решение системы  можно трактовать как нахождение координат точек, принадлежащих одновременно двум данным прямым. Поэтому, в случае , прямые, задаваемые уравнениями системы, пересекаются; в случае  - совпадают; и в случае , но или  - параллельны.

***Пример:***построить прямые по известным уравнениям

а) ; б) ; в) ;

*Решение:* а) перейдем к уравнению прямой «в отрезках»; для этого перенесем свободный член уравнения в его правую часть и поделим уравнение на (-6):  ,  (рис.56). б) в уравнении нет свободного члена, поэтому нельзя воспользоваться уравнением «в отрезках». Воспользуемся уравнением с угловым коэффициентом: . Очевидно, прямая проходит через начало координат.

в) Снова воспользуемся уравнением с угловым коэффициентом: . Прямая параллельна оси .

*Пример:* определить параметры  прямых

а) , б) , в) , г) ;

Решение: для нахождения параметров  достаточно выразить в уравнении переменную :

а) ; ; значит, ;

б) ; значит, ;

в) ;

г) ; ; значит, ;

***Пример:*** Даны вершины треугольника , , . Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины .

*Решение:* прямая, отрезок которой является высотой  треугольника , перпендикулярна прямой .

Составим уравнение прямой  как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:



; ; ; ; 

Угловой коэффициент высоты определим из условия :

; . Уравнение искомой высоты можно записать в виде , где коэффициент  пока не определен.

Значение этого коэффициента определим из того, что прямая  проходит через данную точку : ; . Уравнение высоты - .

***Пример:***Определить, какие из данных прямых параллельны, и какие перпендикулярны.

1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

*Решение*: Прямая 1) параллельна прямой 2) т.к. ; прямая 1) не параллельна прямой 3), т.к. , по той же причине прямая 1) не параллельна прямой 4). Прямые 3) и 4) параллельны.

Прямая 1) не перпендикулярна прямой 3), т.к. .

Прямая 1) перпендикулярна прямой 4) т.к. . Прямая 2) перпендикулярна прямой 4), прямые 3) и 4) не перпендикулярны.

***Пример:*** На плоскости дана точка .

а) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно вектору ;

б) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно вектору ;

в) составить уравнение прямой, проходящей через точки  и ;

г) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку под углом  к положительному направлению оси ;

д) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку и отсекающей на осях координат треугольник площади 10;

*Решение:* а) Пусть точка лежит на прямой, тогда векторы  и  взаимно перпендикулярны и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю: .

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим общее уравнение прямой: .

б) Сведем задачу к предыдущей: для этого надо найти какой-либо вектор, перпендикулярный данной прямой. Но если вектор перпендикулярен искомой прямой, то он будет перпендикулярен и вектору . Вектор  перпендикулярен вектору , т.к. их скалярное произведение равно нулю. Значит, . Общее уравнение прямой: .

в) По приведенной выше формуле получим: . Раскрыв это равенство как пропорцию, и приведя подобные слагаемые, получим общее уравнение прямой: .

г) Если речь идет о каких-либо углах, лучше воспользоваться уравнением прямой с угловым коэффициентом .

Поскольку , то . Подставим в последнее уравнение координаты точки : . Значит,  и уравнение прямой: .

д) Если речь идет об отрезках, отсекаемых прямой на осях координат, удобно бывает воспользоваться уравнением прямой «в отрезках» . По условию  и .

Решим систему : ; ; ; ; ; ; ; .

Задача имеет два решения:  и .

**Самостоятельная работа:**

**4.1.1.** Дано общее уравнение прямой: .

а) составить уравнение этой прямой с угловым коэффициентом;

б) составить уравнение этой прямой «в отрезках»;

в) составить параметрические уравнения этой прямой;

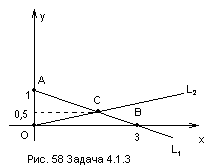
г) построить эту прямую в системе координат;

**4.1.2.** Даны параметрические уравнения прямой:, ;

а) составить общее уравнение этой прямой;

б) составить уравнение этой прямой «в отрезках»;

в) составить уравнение этой прямой с угловым коэффициентом;

 г) построить эту прямую в системе координат;

**4.1.3.** а) Составить уравнения изображенных на рисунке 58 прямых  и . б) Найти площади треугольников OAB и OAC.

**4.1.4.** Дано уравнение прямой  на плоскости: 

и точка .

а) составить уравнение прямой, параллельной  и проходящей через данную точку;

б) составить уравнение прямой, перпендикулярной  и проходящей через данную точку;

в) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку под углом  к прямой ;

**4.1.5.** На плоскости задан треугольник с вершинами в точках ; ; ;

а) составить уравнение его медианы; б) составить уравнение его высоты ;

**4.1.6.** Даны три вершины параллелограмма ;; ;

а) какие координаты могут быть у его четвертой вершины?

б) какие координаты могут быть у центра параллелограмма?

в) доказать, что площадь параллелограмма не зависит от координат его четвертой вершины;

**4.1.7.** Определить взаимное положение пар прямых на плоскости:

а)  и ;

б)  и , ;

в) ,  и , ;

**4.1.8.** Составить уравнения прямых, от которых равноудалены три данные точки

; ; .

**4.1.9.** Найти взаимное расположение трех прямых:

а) ,  и ;

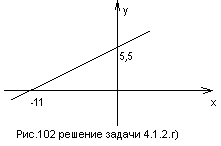
б) ,  и ;

в) ,  и ;

**4.1.10.** Составить уравнения прямых, параллельных прямой  и отстоящих от нее на расстояние 2.

**Ответы:**

**4.1.1.**  а) ; б) ; в);

**4.1.2.** а) ; б) ;

в) ; г) см. рис.102;

**4.1.3.** а) :  и : 

б) , ;

**4.1.4.** а) ; б) ; в)  и ;

**4.1.5.** а) ; б) ;

**4.1.6.** а)  или  или ; б) или  или ;

в) площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника с вершинами ;

**4.1.7.** а) прямые совпадают; б) прямые пересекаются; в) прямые параллельны;

**4.1.8.** ;  и ;

**4.1.9.**а) прямые попарно пересекаются в трех различных точках;

б) прямые попарно пересекаются в трех различных точках;

в) первая и третья прямые совпадают, третья их пересекает;

**4.1.10.**  и ;